Изпитна тема № 16: Математически основи на програмирането

Бройни системи. Преобразуване от една бройна система към друга. Операции в бройни системи. Статистика. Генерална съвкупност и извадка. Средна стойност, мода и медиана. Графични представяния на статистически данни - полигон, хистограма, кръгова диаграма. Свойства на функциите. Правоъгълна координатна система. Изобразяване на графика на функция. Системи линейни уравнения. Методи за решаване на системи линейни уравнения с повече неизвестни.

Бройните системи представляват начин на записване на числа, чрез използването на набор от цифри или символи и различни правила за представяне на числата. Основните 2 вида бройни системи са позиционна и непозиционна. При непозиционните бройни системи стойността на всяка цифра е константна и не зависи от нейното място в числото. Примери за такива бройни системи са римската и гръцката. При позиционните бройни системи, стойността на отделните цифри, зависи от това къде се намират в числото. Най-използваните бройни системи са двоична, осмична, десетична и шестнадесетична.

Двоичната бройна система най-често се използва за обработка на числата в компютърната техника. За представяне на числата се ползват единствено цифрите 0 и 1. За да се преобразува едно число от десетичната бройна система в число от двоичната бройна система е необходимо да извърши деление на 2 с остатък. Делението продължава, докато получим частно 0, а двоичното число представлява остатъците от делението, записани в обратен ред.

13 : 2 = 6, Остатък: 1

6 : 2 = 3, Остатък: 0

3 : 2 = 1, Остатък: 1

1 : 2 = 0, Остатък: 1

13(10) = 1101(2)

Подобно на десетичната бройна система, в двоичната също има правила за аритметичните действия събиране, изваждане и умножение.

За събиране двоични числа важат следните правила:

|  |  |
| --- | --- |
| 0 + 0 = 0 | 1 0 1 1 0(2)  1 1 0(2)  1 1 1 0 0(2) |
| 1 + 0 = 1 |
| 0 + 1 = 1 |
| 1 + 1 = 1 0  „1“ се прехвърля към следващата цифра |

За изваждане двоични числа важат следните правила:

|  |  |
| --- | --- |
| 0 - 0 = 0 | 1 1 0 0 0 0 1 0(2)  1 0 1 1(2)  1 0 1 1 0 1 1 1(2) |
| 1 - 0 = 1 |
| 1 - 1 = 0 |
| 1 0 - 1 = 1  „1“ се прехвърля към предходната цифра |

Шестнайсетичната бройна система е позиционна и използва цифрите от 0 до 9 и буквите A, B, C, D, E, F за представяне на числата. Всяка шестнайсетична цифра се представя като група от четири двоични цифри (бит). Причина за това е, че за съхраняването на данните в оперативната памет на електронниизчислителните машини се използва двоичен код. За да преобразуваме едно число от шестнайсетична в десетична бройна система е необходимо да умножим всяка цифра с 16[0..n] като започнем от последната позиция. След това резултатът се събира.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 8 \* 160 = 8 \* 1 = 8 |  | 1C8(16) = 456(10) |
| C \* 161 = 12 \* 16 = 192 |  |
| 1 \* 162 = 1 \* 256 = 256 |  |
| 8 + 192 + 256 = 456 |  |

Двоичната бройна система намиран широко приложение при работата с битове. Най – използваните побитови операции са побитово „и“, „или“, „изключващо или“ и побитово отрицание. В таблицата са демонстрирани резултатите от побитовите операции.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | ~x  (отрицание) | x & y  (и) | x | y  (или) | x ^ y  (изключващо или) |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Статистиката е наука, която се занимава със събирането, подреждането, анализа и представянето на данни. Генерална съвкупност представлява дадено количество от обекти, които са подбрани по дадени критерии и имат поне един общ признак. Например в генералната съвкупност сини химикали са включени обекти, които имат 2 общи признака, това че са химикали и това, че са сини. Генералните съвкупности често представляват голям обем от данни и изследването на всеки отделен елемент от съвкупността е невъзможно. Поради тази причина обикновено се изследва само част от всички елементи. Тази част се нарича извадка.

Средната стойност, модата и медианата са понятия от статистиката, с които се описват и обобщават набор от данни с едно число. Средната стойност представлява стойността от сбора на елементите в извадката, разделена на техния брой. Например средата стойност на числата {5; 6; 7; 8} e x = (5 + 6 + 7 + 8) : 4 = 6.5. Модата е най-често срещаният елемент в извадката. Например в извадката {6; 3; 2; 6; 1; 1; 3; 6}, модата ще бъде числото 6, защото то се среща най-много пъти. Медианта представлява числото, което се намира в центъра на поредица от подредени елементи. За да бъде намерена медианата е необходимо първо да се подредят елементите, а след това да се намери числото в цетъра. Ако броят на елементит е четен, за медиана се взема средната стойност на двете средни числа.

|  |  |
| --- | --- |
| {5; 3; 2; 1; 4} | {6; 12; 3; 1} |
| {1; 2; 3; 4; 5} | {1; 3; 6; 12} |
| **Meди**ана = 3 | **Meди**ана = (3+6) / 2 = 4,5 |

В статистиката често се налага данните да бъдат представяни графични, за да бъде по-лсено тяхното разбиране. Най-често за графично представяне се използват полигон, хистограма или кръгова диаграма.

Полигонът представлява начупена линия, чрез коята се представят честотите в извадката. В примерната диаграма са представени броя поръчки в заведение в определени часове.

Б

Р

О

Й

П

О

Р

Ъ

Ч

К

И

Час

Хистограмата е вид графично представяне, при което данните са представени като правоъгълници, които представляват отделните части от извадката според относителното им разпределение. В примерната диаграма е представено съотношението на броя клиенти и сумата, която са похарчили в ресторант.

Кръговата диаграма представлява представяне на данните под формата на кръг. За да се намери големината на отделните сектори е необходимо да се намери дъгата от окръжността на всеки сектор. Броят на всички елементи съответства на на 360о, а 1% винаги е 3,6о. В примерната диаграма са представени данни за поръчки в ресторант.

Правоъгълната координатна система се използва, за да се определят положенията на точките в равнината или пространството, чрез числа, поставени върху две оси. Системата се състои от две взаимно перпендикулярни прави, които чрез избиране на положителна посока се превръщат в оси на системата, пресичащи се в точка О, която бива обозначена за начало на системата. Хоризонталната ос Ох се нарича абсцисна, а вертикалната ос Оу се нарича ординатна. Мерните единици трябва да се еднакви за двете оси. Двете координатни оси разделят равнината на четири квадранта. Положението на всяка точка в равнината се определя от две координати х и у. Координатата х е равна на дължината на отсечката ОВ и се нарича абсциса на точката А, а координатата у е равна на дължината на отсечка ОС и се нарича ордината на точката А.

Функция се нарича правило f, посредством което на всяка стойност х се съпоставя точно една стойност у. Обикновено се отбелязва с y = f (x). Величината х се нарича аргумент, а величината у – функция. Стойностите, които може да заема аргумента се наричат дефиниционно множество или дефиниционна област на функцията. Множеството от стойности, които може да заема функцията се нарича функционално множество. За да бъде определена една функция, трябва да бъдат дадени дефиниционно множество и правило f, което съпоставя на всяко x от ДМ точно едно определено y от функционалното множество.

A picture containing line, diagram, parallel, plot

Description automatically generatedСъществуват няколко основни вида функции – линейни, квадратни, биквадратни, дробни, ирационални, логаритмични и др. Линейните функции се задават с формулата y = аx + b, където а се нарича ъглов коефициент, а константата b, свободен член. Ако а е положително число, функцията е растяща, а ако е отрицателно – намаляваща. Графиката на всяка линейна функция е права линия. Например графиката на функцията f(x) = x+2 ще изглежда по следния начин:

A graph of a function

Description automatically generated with low confidenceКвадратните функции са функции от вида f(x) = ax2+bx +c, където а != 0, b и c са произволни реални числа. Графиката на квадратната функция се нарича парабола. Ако а > 0, параболата е с върха надолу, а ако а < 0, параболата е с върха нагоре. Върхът на параболата се е точката V (xv, yv), като xv = ., yv се намира, чрез заместване на аргумента x, във функцията y. Графиката на функцията пресича абсцисната ос в точки с координати А(х1,0) и В(х2, 0). Числата х1и х2 се намират, чрез решаване на квадратното уравнение. Графика на функцията f(x) = 2x2 + 10x – 3:

Системите линейни уравнение представляват набор от алгебрични уравнения от първа степен, които включват едни и същи променливи. Решаването на системата се получава чрез присвояване на числени стойности на променливите, така че всички уравнения да са изпълнени едновременно. Така решение на системата се нарича всяка наредена група от n на брой числа, удовлетворяващи всяко от уравненията в системата. Определена система е тази, която има точно едно решение, неопределената има повече от едно, а несъвместимата няма нито едно решение.

Методът на заместването е най-простият метод за решаване на система линейни уравнения. Той последователно замества променливите от едно уравнение в друго, което изисква много операции и затова най-често се използва за намирането на решението на системи с малък брой неизвестни. В този метод избраното неизвестно се представя във вида на функция и се замества в друго уравнение. След всяко заместване се отстранява по едно неизвестно, докато се остане само едно.

Методът на Гаус е един от най-използваните методи за решаване на системи от линейни уравнения и е още наречен метод на последователното изключване на неизвестните. Системата се трансформира последователно с помощта на елементарни преобразувания, в системи, които са еквивалентни на нея, до получаването на система с триъгълна матрица. От получената матрица се определят последователно неизвестните, като се почва от последния ред и се замества. В следния пример се демонстрира решение на система линейни уравнения, чрез метода на Гаус.

A picture containing text, font, line, white

Description automatically generatedЧрез коефициентите получаваме разширената матрица на системата.

A picture containing font, diagram, white, number

Description automatically generated

Умножаваме първи ред на В с -1 и 6 и прибавяме съответно към втори и трети. A picture containing font, diagram, line, white

Description automatically generated

Прибавяме втори ред към трети ред.

A picture containing font, diagram, white, line

Description automatically generated

От трети ред на матрицата определяме х3 = 56 : 28 = 2.

На втори ред имаме 7х2 – 7х3 = 32. Заместваме с вече намерената стойност на х3 и получаваме 7x2 – 7\*2 = 32, от което следва, че стойността на х2 е . Аналогично замествеме стойностите на х1 и х2 в ред 1 и получаваме стойност за х1 = . Следователно решенията на системата линейни уравнения са 2, и .

Обобщен план (Опорни думи)

1. **Бройни системи**
   * Начин за записване на числата
   * 2 вида – позиционни и непозиционни
   * Двоична, осмична, десетична, шестнайсетична
2. **Преобразуване от една бройна система към друга**
   * Десетична в двоична – Деление на 2 с остатък, до получаване на частно 0. Записване в обратен ред.
   * Шестнайсетична – Използва цифри 0-9 и букви A-F.
   * Шестнайсетична в десетична – Всяко, число се умножава по 16[0…n], след това се събират.
3. **Операции с бройни системи**
   * Събиране, Изваждане – Прехвърляне към предходна и следваща цифра.
   * Побитови операции – И (&), Или (|), Изключващо или (^), Отрицание (~)
4. **Статистика – обработка, анализ, визуализиране на данни**
5. **Генерална съвкупност и извадка**
   * Генерална съвкупност – количество от обекти, поне 1 общ критерий.
   * Извадка – част от генералната съвкупност, по-лесно за изследване
6. **Средна стойност, мода и медиана – обобщават набор от данни с едно число.**
   * Средна стойност – сумата от елементите, разделена на броя
   * Мода – най-често срещания елемент
   * Медиана – Средния елемент при **подредена** извадка. При четен брой елементи, средната стойност на двата средни елемента.
7. **Графични представяния на статистически данни - полигон, хистограма, кръгова диаграма – визуализация на данните.** 
   * Полигон – Начупена линия. Представя честоти.
   * Хистограма – Правоъгълници. Относително разпределение. Съотношение.
   * Кръгова диаграма – Кръг. Сектори. 1% = 3.6о.
8. **Свойства на функциите**
   * Функция – y = f(x). x – аргумент, у – функция. Всяка стойност на х, точно 1 у.
   * Дефиниционна област – стойностите, които може да заема аргумента (х).
   * Функционално множество – стойностите, които може да заема функцията (у).
   * Определена функция – има правило(f) съпоставя всяко х от ДМ с едно у от ФМ.
9. **Правоъгълна координатна система - определя положенията на точките в равнината или пространството, чрез числа, поставени върху две оси.**
   * Абсцисна ос – хоризонталната ос.
   * Ординатна ос – вертикалната ос.
   * Взаимно перпендикулярни, разделят на 4 квадранта.
10. **Изобразяване на графика на функция.**
    * Линейни функции – у = ах + b. Графиката е права линия. Намаляваща, растяща функция.
    * Квадратна функция - f(x) = ax2+bx +c. Графиката е парабола. xv =
11. **Системи линейни уравнения - набор от алгебрични уравнения от първа степен, които включват едни и същи променливи**
12. **Методи за решаване на системи линейни уравнения с повече неизвестни.**
    * Метод на заместването – Най-лесен. Замества от неизвестните от едното в другото уравнение. Отнема най-много време.
    * Метод на Гаус - трансформира последователно с помощта на елементарни преобразувания, в системи, които са еквивалентни на нея, до получаването на система с триъгълна матрица. От получената матрица се определят последователно неизвестните.

Казус

Напишете програма на С++, която решава определени системи от линейни уравнения по метода на Гаус. Коефициентите и решенията са реални числа. Решенията трябва да бъдат закръглени до 3-ти знак след десетичната точка. Използвайте манипулатора.

cout << setprecision(3) << fixed;

Вход: На стандартния вход се въвеждат последователно броя на неизвестните и коефициентите на разширената матрица по редове.

Изход: Извеждат се решенията на системата на отделни редове.

Забележка: Не се изисква проверка за съвместимост на уравненията!

|  |  |
| --- | --- |
| Вход | Изход |
| 3 | 2.000 |
| 1 2 5 -9 | -3.000 |
| 1 -1 2 3 | -1.000 |
| 3 -6 -1 25 |  |

A screenshot of a computer code

Description automatically generated with low confidence

A screenshot of a computer program

Description automatically generated with low confidence

A picture containing text, screenshot, font, number

Description automatically generated